

Selber erklären 4.4

Aufgabe 1

Wir notieren die Koeffizienten und Konstanten der Normalform in einer Tabelle. Dadurch müssen wir viel weniger Zeichen aufschreiben.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 11 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -21 & 19 \\ 0 & -5 & 1 & 4 & -8 \\ -19.5 & 0 & 0 & 6 & 8.5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Überprüfe, dass das LGS tatsächlich in der Normalform ist, bevor du beginnst.

Vergiss die Vorzeichen nicht und schreib eine 0, falls die Variable, welche der Position entspricht nicht vorkommt.

Aufgabe 3

- zwei Zeilen vertauschen
- eine Zeile mit einer Zahl ungleich Null multiplizieren
- eine Zeile zu einer Zeile dazu addieren

Wenn wir zwei Zeilen vertauschen, dann werden weiterhin beide Gleichungen erfüllt.

Aufgabe 4

Diese Umformung ist falsch. Wenn man zu jedem Koeffizient und zur Konstante einer Zeile 1 dazu addiert, ist es wie mit der Gleichung $1x + 1y + 1z = 1$ zu addieren. Diese Gleichung muss aber nicht wahr sein.

Aufgabe 5

In der zweiten Zeile ist der erste Koeffizient Null. In der dritten Zeile sind die ersten zwei Koeffizienten Null. In der vierten sind die ersten drei Koeffizienten Null. Und so weiter.

Der Vorteil der Treppenform ist, dass die wir von unten nach oben die Gleichungen einfach auflösen können und die Lösungsmenge bestimmen können, da in der untersten Gleichung (normalerweise) nur noch eine Unbekannte enthalten ist.

Aufgabe 6

Das ist nicht die Treppenform die wir besprochen haben. Aber man kann auch in dieser speziellen Form die Lösung einfacher bestimmen, da die erste Gleichung aus nur noch einer Variable besteht.

Aufgabe 7

Dieser Plan geht leider nicht auf. Es ist kein Fehler, aber es bringt uns nicht näher an die Zeilenstufenform. Eine gute Strategie ist es Spalten um Spalten in die Zeilenstufenform zu bringen.

Aufgabe 8

$$\text{I zu III add } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{II zu III add } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Idee geht leider nicht auf, da III nach der ersten Operation ganz neue Koeffizienten hat.

Nach der ersten Null würde ich die Spalte in die Zeilenform bringen.

Aufgabe 9

- a) In der Treppenform ist der erste Koeffizient jeder Zeile, der nicht null ist, ein Pivot.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Pivots aus diesem Beispiel sind 2, -1, 5.

- b) Die *normierte Zeilenstufenform* ist die Treppenform wobei alle Pivot-Elemente den Wert 1 haben.
- c) Die *Reduzierte Zeilenstufenform (rref)* ist eine normierte Zeilenstufenform, wobei alle Koeffizienten (ohne die Konstanten) und denn Pivots Null sind.

Aufgabe 10

- a) II: $0 = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$
- b) II: $0 = 0$. Es muss also nur noch I erfüllt werden. Dazu gibt es unendlich viele Lösungen.
- c) Da II und III identisch sind, können wir eine streichen. Das lineare Gleichungssystem ist unterbestimmt und es gibt unendlich viele Lösungen.
- d) Das lineare Gleichungssystem ist unterbestimmt und es gibt unendlich viele Lösungen.
- e) IV: $0 = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$

Wahr oder falsch 4.4

- a) Falsch: $-3y$ wird zu -3 in der Matrix.
- b) Falsch: Die Gleichung war nicht normiert. Die Lösung wäre $(1 \quad -4 \quad) \quad 1 \quad -4 \quad 15)$
- c) Wahr
- d) Wahr: Die Division durch eine Zahl ist die Multiplikation mit dem Kehrwert und somit eine Äquivalenzumformung.
- e) Falsch:
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \{(2)\}$
Vertauscht man nun die Zeilen und Spalten bekommen wir eine andere Lösung
 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \{(\frac{1}{2})\}$
- f) Wahr. Die „Treppe“Treppe besteht aus genau 10 Nullen.
- g) Falsch
- h) Wahr: Da $-3I = III$ ist die dritte Zeile überflüssig und wir können sie streichen. Dadurch haben wir eine 2×4 Matrix in der Treppenform, also ein lösbares unterbestimmtes 2×3 -LGS.
- i) Wahr

Üben und Anwenden 4.4

Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 11 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 5 & 11 \\ -3 & -5 & 1 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$\begin{array}{l|l} \text{I} & x_1 + x_2 = 5 \\ \text{II} & x_2 + x_3 = 4 \\ \text{III} & x_3 + x_4 = 3 \\ \text{IV} & x_4 + x_5 = 2 \\ \text{V} & x_2 + x_4 = 1 \end{array}$$

Aufgabe 3

a) $-2\text{I zu II add } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \{(\frac{3}{2}, -2)\}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & 4 \\ -6 & 8 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{I zu II add} \\ 3\text{I zu III add} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \text{II zu III add } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
 $\text{III: } 0 = 6 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$

c) $\begin{array}{l} \text{I}/2 \\ -\text{I}/2 \text{ zu II add} \\ 2\text{I zu III add} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 15 \end{pmatrix} 2\text{II zu III add } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \{(-\frac{19}{7}, -\frac{33}{7}, \frac{9}{7})\}$

d) normalisieren $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\text{I zu III add} \\ 3\text{I zu IV add} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{Tausche II und III } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
 $\begin{array}{l} -\text{II zu III add} \\ -\text{II zu IV add} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} -2\text{III zu IV add } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{IV: } 0 = -3 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$

e) $\begin{array}{l} -\text{I zu II add} \\ -2\text{I zu III add} \\ -\text{I zu IV add} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Da $2\text{II} = 2\text{III} = \text{IV}$ alle die gleichen Aussagen sind, brauchen wir nur II zu behalten und können das 2x4-LGS lösen.

$$\text{II:} \quad 2x_3 - x_4 = -2 \quad |x_3 = q \quad (1)$$

$$x_4 = 2q + 2 \quad (2)$$

$$\text{I:} \quad x_1 + x_2 + 2q + 2 = 2 \quad |x_2 = p \quad (3)$$

$$x_1 = -2q - p \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{(-2q - p, p, q, 2q + 2)\} \quad (4)$$

f) $\begin{array}{l} 2\text{II zu I add} \\ 2\text{IV zu II add} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3\text{I zu II add} \\ -2\text{I zu III add} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -22 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
 $\begin{array}{l} (-2)\text{III zu II} \\ \text{I} \leftrightarrow \text{IV} \\ \text{II} \leftrightarrow \text{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1, 4, 0, 1)\}$