Selber erklären 4.3

Aufgabe 1

Wir können ein beliebiges reelles x wählen, dies in der Gleichung einsetzen und die Gleichung auflösen. Dann erhalten wir das dazu gehörende y. Den Punkt tragen wir in das Koordinatensystem ein.
Dies wiederholen wir, bis wir die Gerade im Koordinatensystem erkennen und mit dem Lineal ziehen können.
Tipp: Wenn wir die Gleichung umformen, sodass sie nach y aufgelöst ist, müssen wir nach dem einsetzten nur ausrechnen und nicht mehr nach y auflösen.

Aufgabe 2

Diese Gerade ist die Menge aller Lösungen des 2x2-LGS.

Aufgabe 3

Jede Gleichung mit zwei Unbekannten ist (generell) äquivalent zu einer Geraden. Die Lösung eines LGS mit zwei Unbekannten ist die Schnittmenge all dieser Geraden.
Zwei Geraden können parallel sein, dann gibt es keinen Schnittpunkt. Wenn sie identisch sind, ist die Schnittmenge diese Gerade selbst. Wenn die Geraden weder identisch noch parallel sind, gibt es einen Schnittpunkt. Daraus folgt, dass die Lösungsmenge leer ist, genau ein 2er-Tupel oder unendlich viele Lösungen enthält.

Aufgabe 4

a) Ein LGS heisst regulär, wenn die Lösungsmenge genau ein Tupel enthält.

b) Ein LGS heisst singulär, wenn die Lösungsmenge leer ist oder unendlich viele Tupel enthält.

Aufgabe 5

$\boxed{7 \times 7} \rightarrow \boxed{6 \times 6} \rightarrow \boxed{5 \times 5} \rightarrow \boxed{4 \times 4} \rightarrow \boxed{3 \times 3} \rightarrow \boxed{2 \times 2} \rightarrow \boxed{1 \times 1}$

Das einkochen ist beendet, wenn wir nur noch eine Gleichung haben. Dann haben wir eine lineare Gleichung vor uns, die wir wie gewohnt lösen können.

Diese Lösung können wir bei einer Gleichung des 2x2-LGS einsetzen damit die andere Variable auch bestimmen. So können wir Schritt um Schritt eine Variable mehr bestimmen, bis wir die Werte der sieben Variablen kennen und die Lösung angeben können.

Aufgabe 6

Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder widersprechen sich die Gleichungen oder zwei Gleichungen sind äquivalent und wir können bei einem „Einkochungsschritt " gleich mehrere Gleichungen streichen.

Aufgabe 7

$\boxed{3 \times 4} \rightarrow \boxed{2 \times 3} \rightarrow \boxed{1 \times 2}$

Wir erhalten eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten. Wir können eine Variable mit einem Parameter ersetzen und nach der anderen Auflösen.

Die Lösung enthält dann einen Parameter, den wir nach belieben anpassen können. Dadurch haben wir unendlich viele Lösungen. Das LGS ist *unterbestimmt* und *singulär*.

Aufgabe 8

$\boxed{5 \times 3} \rightarrow \boxed{4 \times 2} \rightarrow \boxed{3 \times 1} \rightarrow \boxed{2 \times 0}$

Wir haben zwei Gleichungen aber keine Unbekannte. Das sind Gleichungen wie z.B. $5 = 5$ oder $42 = 0$
Im Normalfall ist die Gleichung falsch und die Lösungsmenge ist leer. Das LGS ist *überbestimmt* und *singulär*.

Geschüttelt 4.3

ii, vii, v,x, i ,ix, ix, viii, iii, vi

Wahr oder falsch 4.3

a) wahr

b) wahr

c) falsch

d) falsch. Eine Gleichung ist nicht linear. Es ist quasi ein 2×2-GS.

e) wahr

f) falsch. Die Geraden können sich auch kreuzen.

g) falsch

h) falsch, z.B. e)

Üben und anwenden 4.3

Aufgabe 1

a) Gesucht: $\frac{p}{q}$

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & \frac{p+3}{q+3} = \frac{3}{10} \\ \text{II} & \frac{p-2}{q-2} = \frac{2}{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & 10p + 30 = 3q + 9 \\ \text{II} & 10p - 20 = 2q - 4 \end{array}$$

Nun haben wir ein 2x2-LGS

$$\begin{array}{r|l} \text{I-II} & 50 = q + 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I-II} & 37 = q \end{array}$$

II: $10p = 2 \cdot 37 - 4 + 20 = 90$
$p = 9 \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{9}{37}$

b) Vater jetzt: v
Sohn jetzt: s

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & v - 5 = 5(s-5) \\ \text{II} & v + 3 = 3(s+3) \end{array}$$

I-II:

$$-8 = 2s - 25 - 9 \quad | + 34 \tag{1}$$
$$26 = 2s \quad | : 2 \tag{2}$$
$$13 = s \tag{3}$$

I:

$$v - 5 = 5(13 - 5) = 40 \quad | + 5 \tag{4}$$
$$v = 45 \tag{5}$$

Der Vater ist heute 45 Jahre alt, der Sohn ist heute 13 Jahre alt.

c) Die Zahl ist $100a + 10b + c$.

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & a+b+c = 18 \\ \text{II} & 100b + 10a + c = 100a + 10b + c + 180 \\ \text{III} & 100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 18 \end{array}$$

Normalisieren:

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & a+b+c = 18 \\ \text{II} & 90b - 90a = 180 \\ \text{III} & 9c - 9b = 18 \end{array}$$

Wir können jede Gleichung mit dem kgV kürzen.

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & a+b+c = 18 \\ \text{II} & b - a = 2 \\ \text{III} & c - b = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I+II=IV} & 2b + c = 20 \\ \text{III} & c - b = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{IV-III} & 3b = 18 \end{array}$$

$b = 6 \Rightarrow$ Mit Einsetzen finden wir die gesuchte Zahl. Sie ist 468.

d) Seien l und b die Länge und Breite des Zauns.

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & l + b = 25 \\ \text{II} & \frac{l \cdot b}{2} = 25 \end{array}$$

Die Gleichung II ist nicht linear.

e) x ist die Anzahl zweiachsigen Güterwagen und y ist die Anzahl dreiachsigen Personenwagen.

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & x + y = 10 \\ \text{II} & 4x + 6y + 8 = 64 \\ \text{I} & 2x + 2y = 20 \\ \text{II} & 2x + 3y = 28 \end{array}$$

II-I: $y = 8$. Einsetzen in I, ergibt $x = 2$.

Der Zug besteht aus einer Lokomotive zweier Güterwagen und aus acht Personenwagen.

Aufgabe 3

Die Kurve von I ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius 3. (Satz vom Pythagoras)

II: $y = -x + 3$ ist linear.

Zeichnet man beides ein findet man genau zwei Schnittpunkte. $\mathbb{L} = \{(-3, 0), (0, 3)\}$

Aufgabe 4

a) Normalform

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & 5x - 2y - 2z = 8 \\ \text{II} & 2x + 7y + z = 11 \\ \text{III} & 5x - 2y - 2z = 8 \end{array}$$

Wir sehen nun, dass I und III identisch sind. I+2II ergibt ein 1x2-LGS und ist somit singulär mit unendlich vielen Lösungen.

b) IV: $x_4 = 4 - x_1$

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & x_1 + x_2 = 1 \\ \text{II} & x_2 + x_3 = 2 \\ \text{III'} & x_3 = x_1 - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{I} & x_1 + x_2 = 1 \\ \text{II'} & x_2 + x_1 = 3 \end{array}$$

I und II' widersprechen sich. $\mathbb{L} = \{\}$. Das LGS ist singulär.

c) Vorsicht, dies ist kein LGS. Wir können es trotzdem mit dem Additionsverfahren lösen.

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5 \\ \text{II} & \frac{2}{x} - \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = -11 \\ \text{III} & \frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = -6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{IV=4I+II} & \frac{6}{x} + \frac{1}{y} = 9 \\ \text{V=I+III} & \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{3IV-V} & \frac{14}{x} = 28 \end{array}$$

$x = \frac{1}{2}$. $y = -\frac{1}{3}$. $z = \frac{1}{6} \implies \mathbb{L} = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})\}$

Aufgabe 5

a) 3I+2II: $0 = 3 + 2b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$

Wenn $b = -\frac{3}{2}$ dann sind die Gleichungen äquivalent und das LGS ist singulär mit unendlich vielen Lösungen.

b) 3I+4II: $(4.5 + 4a)x = (3c - 4.8)$

Damit das LGS singulär ist, darf in dieser Gleichung kein x vorkommen. Somit muss der Koeffizient von x null sein: $(4.5 + 4a) = 0 \implies a = -\frac{9}{8}$

Somit ist unsere Gleichung $0 = 3c - 4.8$. Damit die Lösungsmenge leer ist, darf diese Gleichung nicht erfüllt werden. Also darf c nicht 1.6 sein.

$\mathbb{L}_{LGS} = \{\} \Leftrightarrow a = -\frac{9}{8} \wedge c \neq \frac{8}{5}$

c) 2I+3II:$(8 + 3p)x = 6 + 3q$ Damit das LGS singulär ist, darf in dieser Gleichung kein x vorkommen. Somit muss der Koeffizient von x null sein: $8 + 3p = 0 \implies p = -\frac{8}{3}$

Somit ist unsere Gleichung $0 = 6 + 3q$.

Damit die Lösungsmenge unendlich gross ist, muss diese Gleichung erfüllt werden. $q = -2$

Damit die Lösungsmenge leer ist, darf diese Gleichung nicht erfüllt werden. Also darf q nicht -2 sein.

$|\mathbb{L}_{LGS}| = \infty \Leftrightarrow p = -\frac{8}{3} \wedge q = -2$

$\mathbb{L}_{LGS} = \{\} \Leftrightarrow p = -\frac{8}{3} \wedge q \neq -2$