Selber erklären 5.1

Aufgabe 1

Die Quadratwurzel von p ist der positive Wert, welcher mit sich selber multipliziert genau p ergibt.

Aufgabe 2

Da $10^2 = 100 < 111$ ist, können wir sagen, dass die Wurzel von 111 grösser als 10 sein muss. Die selbe Idee nützen wir, um die Wurzel eine obere Schranke zu finden. $11^2 = 121 > 111$. Somit muss die Wurzel von 111 im Intervall $(10, 11)$ liegen.

Aufgabe 3

$\sqrt{0.04} = |0.2| = +0.2 = 0.2$
Die Wurzel ist immer positiv. [1]

Aufgabe 4

$\sqrt{1234}$ hat genau eine Lösung. $x^2 = 1234$ hat unter anderem $\sqrt{1234}$ als Lösung, aber auch die Gegenzahl der Wurzel. Denn auch $(-\sqrt{1234})^2 = 1234$. $\mathbb{L} = \{-\sqrt{1234}, \sqrt{1234}\}$

Aufgabe 5

Sei a eine Ziffer. Dann ist $\overline{1a}$ die Zahl die aufgeschrieben wird mit einem 1 beginnend und nachher die Ziffer a, also $10+a$. Wenn man diese Zahl quadriert, bekommt man mit der Binomischen Formel $(10+a)^2 = 100+2\cdot 10\cdot a+a^2$. Die ersten zwei Summanden tragen nichts zur letzten Ziffer bei, da sie mit Zehn multipliziert wurden. Daher kommt es nur auf die hinterste Ziffer der Basis drauf an, wie die hinterste Ziffer der Quadratzahl lautet.

Dadurch kommt für die Wurzel von 28**9** nur eine der gegebenen in Frage: 17
$6^2 = 3\mathbf{6}$, $7^2 = 4\mathbf{9}$, $8^2 = 6\mathbf{4}$ und $9^2 = 8\mathbf{1}$.

Aufgabe 6

Wir ziehen die Wurzel aus dem aktuellen Jahr, zB. $\sqrt{2021} \approx 44.96$. Wenn wir diese Wurzel aufrunden und quadrieren, bekommen wir die nächste natürliche Quadratzahl.
$45^2 = 2025$

Aufgabe 7

Die Multiplikation und Division sind Operationen zweiter Stufe. Daher darf man da die Wurzel aufteilen. Bei der Addition und Subtraktion ist stimmt die Gleichung nicht.

a) $\sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$
$\sqrt{25} + \sqrt{144} = 5 + 12 = 17$

b) a und b dürfen nicht negativ sein, da wir keine Wurzel aus einem negativen Radikand ziehen können.

Aufgabe 8

Diese Formel hilft uns Wurzeln zu vereinfachen. So können wir zum Beispiel $\sqrt{1200}$ vereinfachen und $\sqrt{3\cdot 4\cdot 100} = \sqrt{3}\cdot 2\cdot 10 = 20\cdot\sqrt{3}$ aufschreiben.

Aufgabe 9

Falls x und y beide kleiner als $\sqrt{50}$ sind, dann ist ihres Produkt auch kleiner als $\sqrt{50}\cdot\sqrt{50} = 50$. Das ist ein Widerspruch. Analog folgt wenn beide Zahlen grösser als die Wurzel sind, dass das Produkt grösser als 50 ist. Wenn eine Zahl genau $\sqrt{50}$ ist, so muss die andere $50 : \sqrt{50} = \sqrt{50}$ sein. Somit muss wenn eine Zahl grösser oder kleiner ist, und die andere Zahl kleiner, respektive grösser als $\sqrt{50}$ sein.

[1] Die Wurzel ist eine Funktion. Dadurch muss es eine eindeutige Antwort geben. Der Betrag eignet sich perfekt dazu, dass man sich genau auf einen Wert einigt.

Aufgabe 10

Wir geben eine Schätzung x_0 für die Wurzel aus $a > 0$. Danach korrigieren wir die Schätzung, damit sie immer näher zu $\sqrt{a}$ wandert.

Dazu bestimmen wir ein Intervall, indem die Wurzel liegen kann. Analog zu Aufgabe 9 suchen wir ein y_0, indem wir $a : x_0$ rechnen. Dann wissen wir, dass $\sqrt{a}$ zwischen x_0 und y_0) liegt.

Die nächste Schätzung ist dann die Mitte von beiden. $x_1 = \frac{x_0+y_0}{2}$. So halbiert sich das Intervall, in welchem wir die Wurzel suchen. Wir setzten auch y_1 näher an $\sqrt{a}$. $y_1 = a : x_1$

Wir fahren immer weiter so fort und bestimmer immer wieder ein neues x_n und y_n mit den Formeln: $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ und $y_n = a : x_n$.

All unsere Schätzungen sind aber rational und werden daher nur beliebig nah an die Wurzel kommen, sie aber nie ganz erreichen.

Aufgabe 11

Das Intervall in dem die Wurzel liegen kann wird immer kleiner als die Hälfte des vorherigen Intervalls. Wir setzten zu Beginn eine Grösse, wie genau wir die Wurzel brauchen: ein Tausendstel oder ein Milliardstel. Sobald die Differenz von x_n und y_n kleiner als diese fixierte Grösse ist, können wir die Schätzung als Ergebnis ausgeben.